電気回路学の復習（1）

2019.4.8

担当教官　山尾　泰

例題1.（回路方程式）

図1の回路において，端子電圧 $v\,(t)$ に成り立つ回路方程式を立てよ．また R,C,L が以下の値をとる場合の式を求めよ

$e(t) = A \sin \omega t\ [V]$,

$R = 1[\Omega]$,

$C = 0.5[F]$,

$L = 1[H]$,

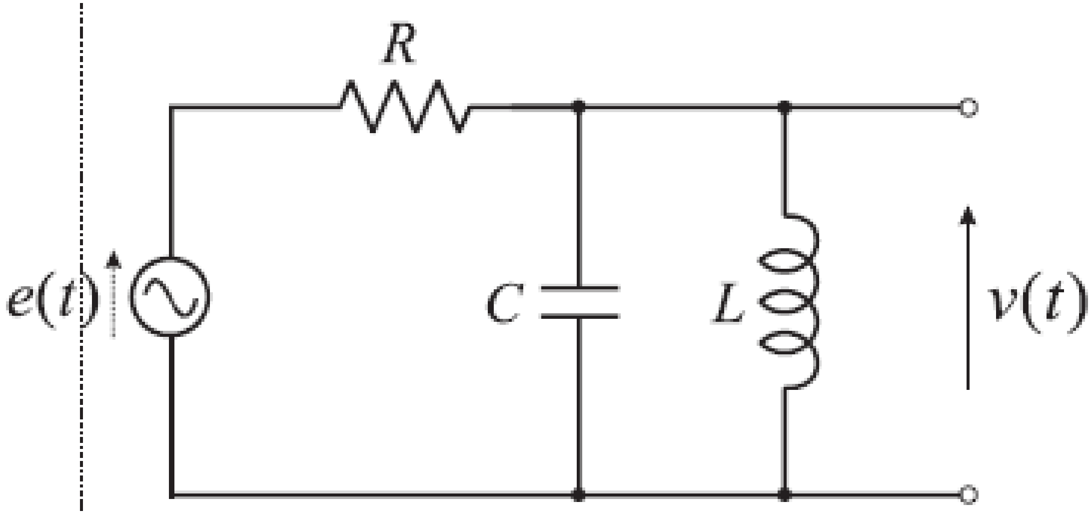


図1

ヒント；理解の“コツ”＝システム分析

- ＜4つの要点＞

システム ：集中定数回路

回路方程式

要素 ：回路素子（抵抗、コンデンサ、コイル、電圧源）

関係 ：接続情報（結線情報）

重要度 ：ドミナント（支配的）な要素と関係

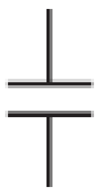
回路方程式とは？

（1）**回路素子**の電圧ー電流の関係式

R  抵抗

$$v(t) = Ri(t) \quad or \quad i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

（オームの法則）

C  コンデンサ

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt \quad or \quad i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

L  コイル

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad or \quad i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

回路方程式とは？

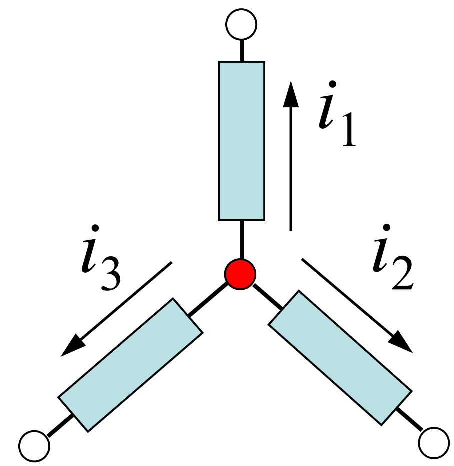
（2）回路網の電圧、電流の法則

（2―1）キルヒホッフの電流法則(KCL)

任意の**節点**を出る枝電流の総和は“0”

$$\sum_{\nu=1}^{m} i_\nu(t) = 0$$

（節点方程式）

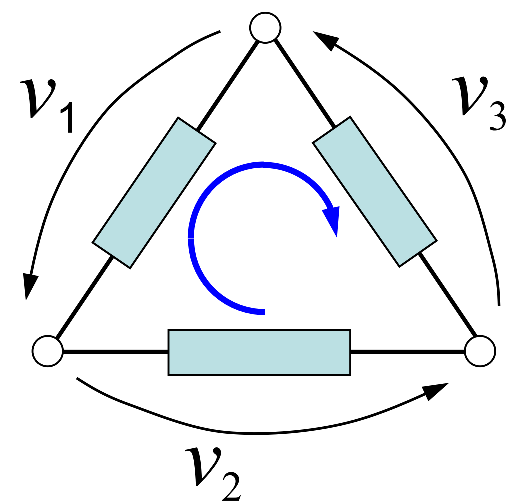


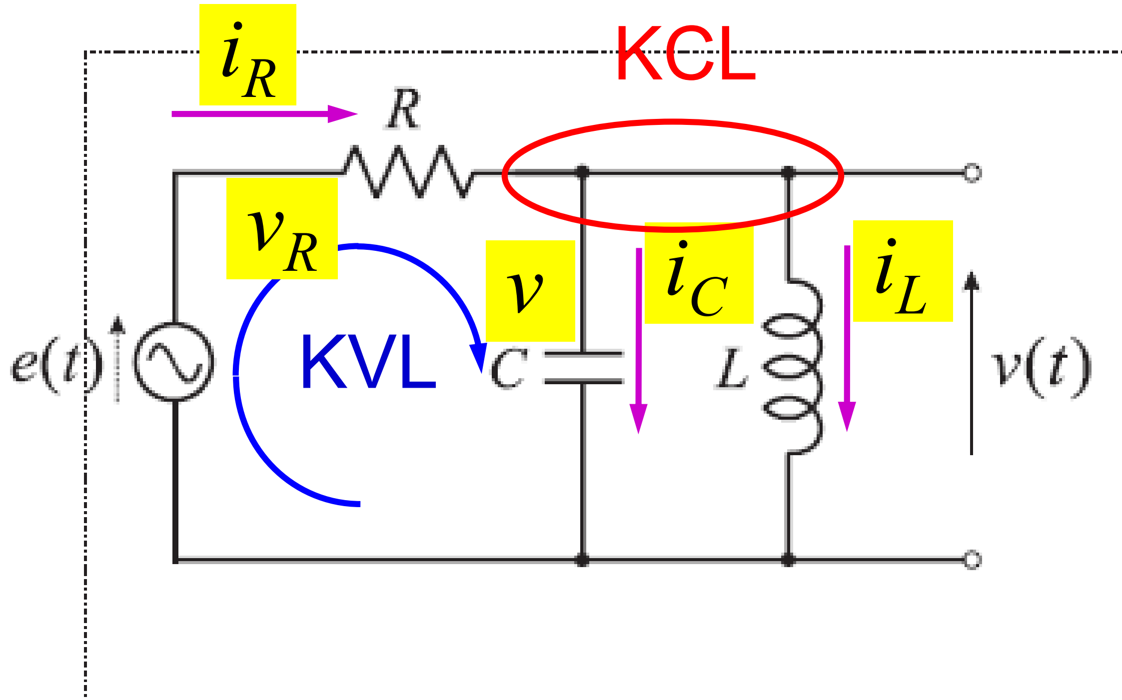
（2―2）キルヒホッフの電圧法則(KVL)

任意の**閉路**に沿った枝電圧の総和は“0”

$$\sum_{\nu=1}^{m} v_\nu(t) = 0$$

（閉路方程式）





KCL $-i_R(t)+i_C(t)+i_L(t)=0$

KVL $-e(t)+v_R(t)+v(t)=0$

$$\Rightarrow \quad v(t)=e(t)-v_R(t)$$

$$v_R(t)=i_R(t)R=(i_C(t)+i_L(t))R=(C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(t)dt)R$$

（続き）

$$\Rightarrow\quad v(t)=e(t)-\left(C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(t)dt\right)R$$

微分と積分が混在しているので、両式を微分して(t)を省略すると

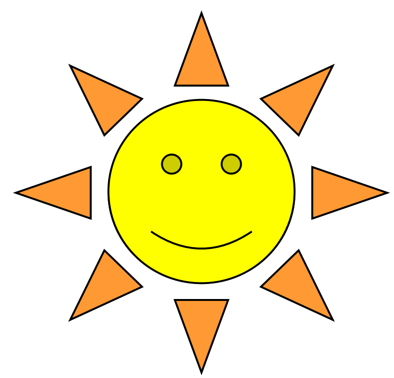
$$\frac{dv}{dt}=\frac{de}{dt}-RC\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{R}{L}v$$

これで変数は v のみとなったので、素子定数 R, C, L と電圧源関数 e を入れると

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d(A\sin\omega t)}{dt}-0.5\frac{d^2v}{dt^2}-v$$

これを微分次数順に整理すると

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2}+2\frac{dv}{dt}+2v=2A\omega\cos\omega t}$$



正　解

回路の正弦波定常解

回路に交流電圧入力（$e(t)=A\sin\omega t$）が印加されてから時間が十分に経過した定常状態で回路に流れる電流は同じ角周波数ωの交流信号となる

$$\boxed{i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi)=I_m\cos(\omega t+\phi)}$$

I_m: 振幅

交流の複素数表示を用いると

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\phi)=\mathrm{Re}\left\{I_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}=\mathrm{Re}\{I(t)\}$$

$I(t)$: 複素表示電流

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{dI}{dt}\right\}=\frac{di}{dt}=\mathrm{Re}\{j\omega I\} \qquad \mathrm{Re}\left\{\int I dt\right\}=\int i dt=\mathrm{Re}\left\{\frac{I}{j\omega}\right\}$$

$$\frac{dI}{dt}=j\omega I \qquad \int I dt=\frac{I}{j\omega}$$

微分方程式において微分演算は $j\omega$ を，積分演算は $\dfrac{1}{j\omega}$ を乗ずることを意味する

回路方程式の正弦波定常解

回路方程式 $v(t) = e(t) - (C\dfrac{dv(t)}{dt} + \dfrac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)dt)R$ において、

$\dfrac{d}{dt}$ を $j\omega$, $\int dt$ を $\dfrac{1}{j\omega}$ と書き直し、

$e(t), v(t)$ を複素数表示E, V に書き直すことで

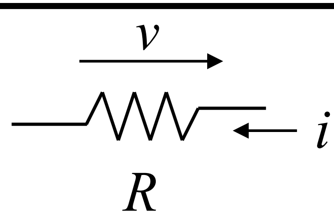
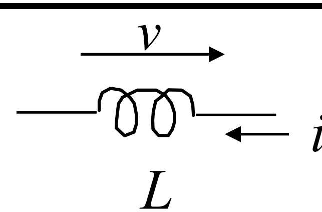
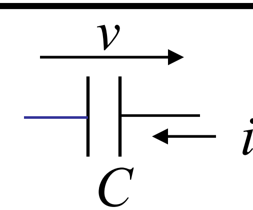
$$V = E - (j\omega CV + \frac{V}{j\omega L})R$$

を得る。これから

$$V = \frac{j\omega L}{R - \omega^2 CRL + j\omega L}E = \frac{j\omega L(R - \omega^2 CRL - j\omega L)}{(R - \omega^2 CRL)^2 + \omega^2 L^2}E$$

$R,\ j\omega L,\ \dfrac{1}{j\omega C}$ 回路素子の交流インピーダンス

回路素子のインピーダンス表示

受動素子	抵抗	インダクタ	キャパシタ
記号			
基本表示	$v = Ri$	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$v = \dfrac{1}{C}\int idt$
複素インピーダンス表示（V, I は複素記号）	$V = RI$	$V = j\omega LI$	$V = \dfrac{1}{j\omega C} I$

フェーザについて

フェーザ(Phasor)とは、交流解析において、
正弦波の実効値振幅と位相を複素ベクトル表示したもの

正弦波の電圧 $v(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ [V]　　A: 振幅

正弦波の電圧の実効値 $E_e = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$ [V]

⇒ 正弦波を印加した抵抗の発熱が直流による発熱と同じになるように換算したもの

実効値表示; $v(t) = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \varphi)$

（続き）

オイラーの公式； $\boxed{e^{jx} = \cos x + j\sin x}$ を用いて

$x = \omega t + \varphi$ とおけば

正弦波の電圧 $v(t)$ は複素数の虚部表示 $\mathrm{Im}[z]$ により

$$v(t) = \mathrm{Im}[\sqrt{2}E_e e^{j(\omega t+\varphi)}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\underline{E_e e^{j\varphi}}e^{j\omega t}]$$

⇩

電圧フェーザ E

同様に電流についても

$$i(t) = \mathrm{Im}[\sqrt{2}I_e e^{j(\omega t+\varphi-\theta)}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\underline{I_e e^{j(\varphi-\theta)}}e^{j\omega t}]$$

⇩

電流フェーザ I

瞬時電力と平均消費電力

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t) \qquad i(t) = i_0 \cos(\omega t + \theta)$$

位相差

瞬時電力

$$p = v(t)i(t) = v_0 i_0 \cos(\omega t)\cos(\omega t + \theta) = \frac{v_0 i_0}{2}\left[\underline{\cos(2\omega t + \theta)} + \cos\theta\right]$$

周波数は2倍

平均消費電力

$$P_L = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} p\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{v_0 i_0}{2}\left[\underline{\cos(2\omega t + \theta)} + \cos\theta\right]dt = \frac{v_0 i_0}{2}\cos\theta = \frac{v_0}{\sqrt{2}}\frac{i_0}{\sqrt{2}}\cos\theta$$

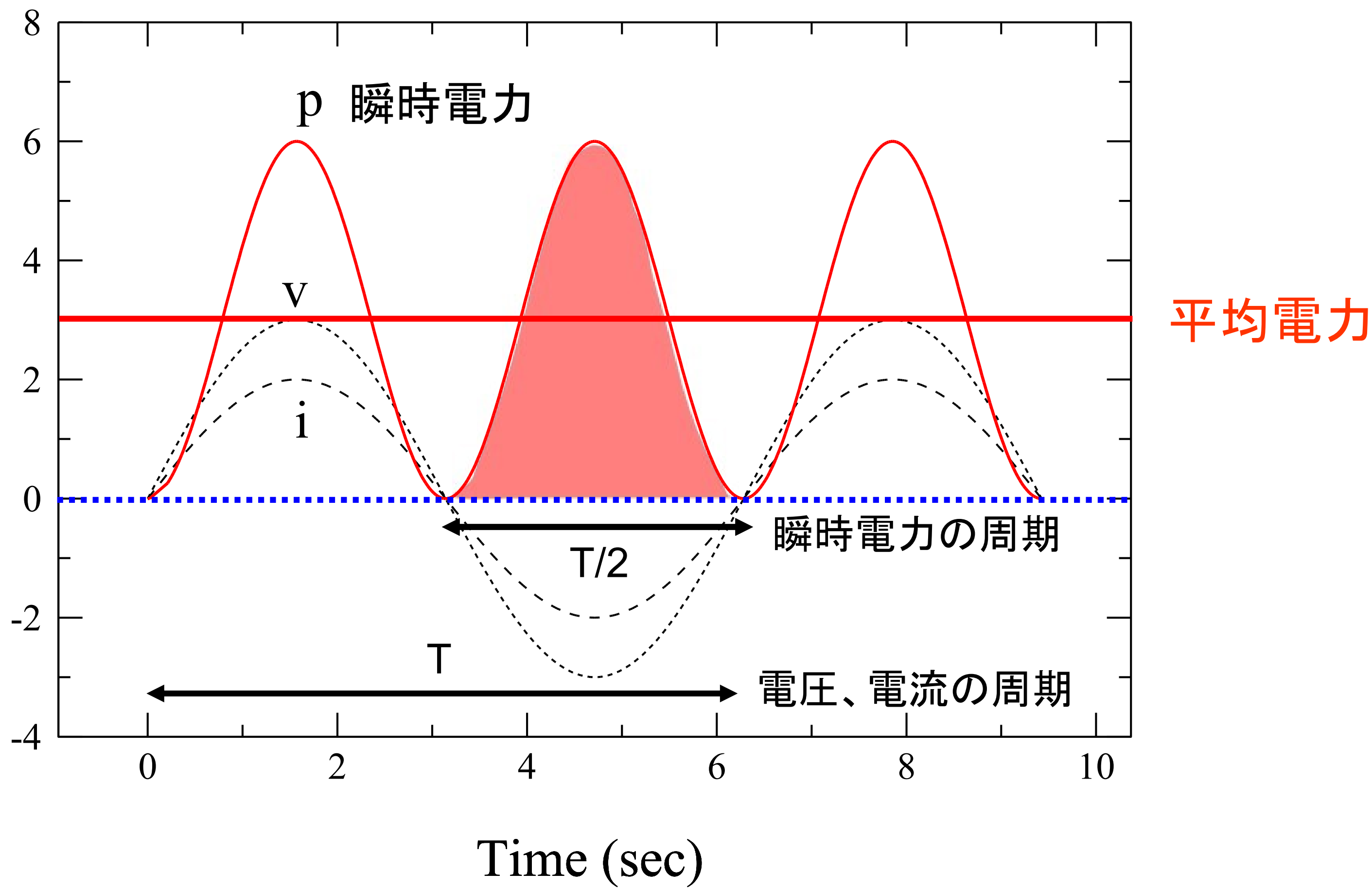
平均すると0

$\frac{v_0}{\sqrt{2}} = v_m$ 実効値電圧　　$\frac{i_0}{\sqrt{2}} = i_m$ 実効値電流

$$\boxed{P_L = v_m i_m \cos\theta}$$

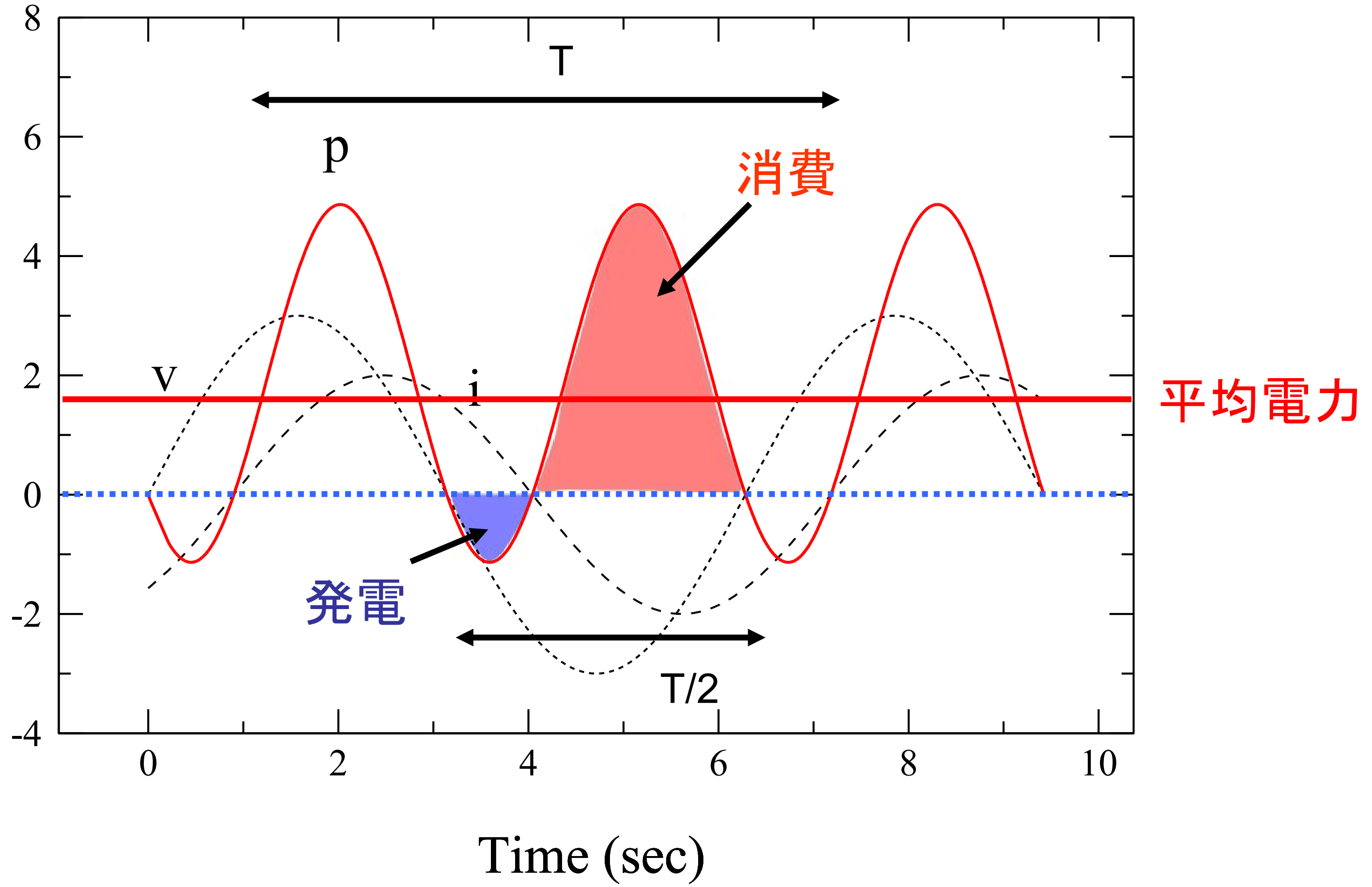
瞬時電力と平均消費電力(1)

電流と電圧が同相の場合



瞬時電力と平均消費電力(2)

電流と電圧に位相差がある場合



平均消費電力のフェーザ表現

$$V = v_m e^{j\omega t} \qquad I = i_m e^{j(\omega t+\theta)}$$

$$VI^* = v_m e^{j\omega t} i_m e^{-j(\omega t+\theta)} = v_m i_m e^{-j\theta}$$

$$V^* I = v_m e^{-j\omega t} i_m e^{j(\omega t+\theta)} = v_m i_m e^{j\theta}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2}\left(V^* I + VI^*\right) = v_m i_m \cos\theta = P_L$$

$$\mathrm{Re}\left(V^* I\right) = v_m i_m \cos\theta = P_L$$

$$\mathrm{Re}\left(VI^*\right) = v_m i_m \cos\theta = P_L$$

$$V = v_m e^0$$

$$I = i_m e^{j\theta}$$

$$VI^* = v_m i_m e^{-j\theta}$$

$$V^* I = v_m i_m e^{j\theta}$$

$e^{j\omega t}$ の省略形

いずれも P_L に等しい

回路システム学演習（1）

例題2　負荷回路で消費される平均電力を求めよ

交流電圧フェーザ を V，電流フェーザ を I とする

（1） 負荷回路の交流インピーダンス Z を求めよ

（2） 負荷回路で消費される平均電力 P を V または I の関数として求めよ